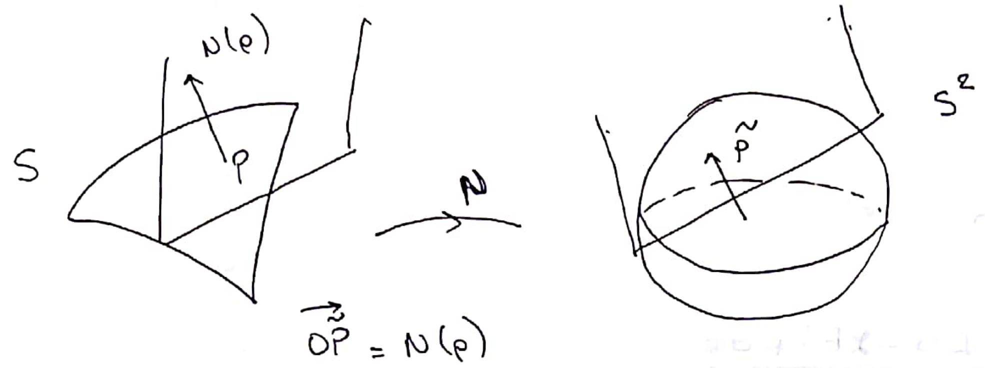
8/12/2017

Μαθημα 17ο

Διαφ. Γεωμ.

- Απεικονιση Gauss



- Απεικονιση Weingarten

$L_p : T_pS \to T_pS$, $L_p = -dN_p$

- Δευτερη θεμελιωδη μορφη

$II_p : T_pS \to \mathbb{R}$ $\quad II_p(w) = \langle L_p, w \rangle_p \quad w \in T_pS$

- Καθετη καμπυλοτητα

$$k_n(w) = \frac{II_p(w)}{I_p(w)}, \quad w \in T_pS \setminus \{0\}$$

- Κυριες καμπυλοτητες

$k_1(p) = \max \{ k_n(w) \mid w \in T_pS, \|w\| = 1 \}$

$k_2(p) = \min \{ k_n(w) \mid w \in T_pS, \|w\| = 1 \}$

- Καμπυλοτητα Gauss και μεση καμπυλοτητα

$K, H : S \to \mathbb{R}$

$K(p) = \det L_p$, $H(p) = \frac{1}{2} \operatorname{trace} L_p$

Θεώρημα

→ κύριες διευθύνσεις

Υπάρχει ορθομοναδιαία βάση $\{e_1(p), e_2(p)\}$ τ.ω $L_p e_1(p) = k_1(p) e_1(p)$

$L_p e_2(p) = k_2(p) e_2(p)$

- $k_1 = H + \sqrt{H^2 - K}$

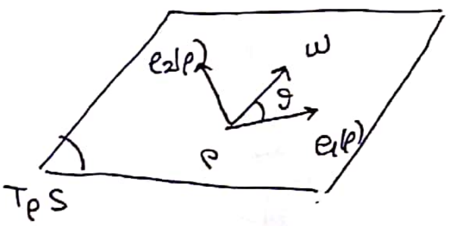
  $k_2 = H - \sqrt{H^2 - K}$ $\quad H^2 \geq K$

$$K = \frac{eg - f^2}{EG - F^2}, \quad H = \frac{EG - 2Ff + Ge}{2(EG - F^2)}$$

Θεώρημα (Τύπος Euler)

Αν $w \in T_p$ με $\|w\| = 1$ και $w = \cos\theta\, e_1(p) + \sin\theta\, e_2(p)$. Τότε ισχύει

$k_n(w) = k_1(p)\cos^2\theta + k_2(p)\sin^2\theta$ (Τύπος Euler)



Απόδειξη

$$k_n(w) = \frac{II_p(w)}{I_p(w)} = II_p(w) = \langle L_p w, w \rangle = \langle L_p(\cos\theta e_1(p) + \sin\theta e_2(p)), \cos\theta e_1 + \sin\theta e_2 \rangle =$$

$$= \langle \cos\theta L_p e_1 + \sin\theta L_p e_2, \cos\theta e_1 + \sin\theta e_2 \rangle =$$

$$= \langle \cos\theta k_1(p) \cdot e_1 + \sin\theta k_2(p) \cdot e_2, \cos\theta e_1 + \sin\theta e_2 \rangle =$$

$$= k_1(p)\cos^2\theta + k_2(p)\sin^2\theta$$

Παραδείγματα

1. Επιφάνειες Γραφήματα

Θεωρώ λεία καμπύλη $h : U \subseteq \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$

$$\Gamma_h = \{ (x, y, h(x,y)) \mid (x,y) \in U \}$$

$X : U \subseteq \mathbb{R}^2 \to \Gamma_h$, $X(x,y) = (x, y, h(x,y))$ (Σύστημα Σουτ)

Πρώτη θεμελιώδη μορφή:

$$E = \|X_x\|^2 , \quad F = \langle X_x , X_y \rangle , \quad G = \|X_y\|^2$$

δεύτερη θεμελιώδη μορφή

$$e = \langle X_{xx}, N \rangle , \quad f = \langle X_{xy} , N \rangle , \quad g = \langle X_{yy}, N \rangle$$

$$X_y = (0,1,h_y) , \quad X_x = (1, 0, h_x)$$

$$X_{xx} = (0,0,h_{xx}) , \quad X_{xy} = (0,0,h_{xy}) , \quad X_{yy} = (0,0,h_{yy})$$

$$E = 1 + h_x^2 , \quad F = h_x \cdot h_y \quad G = 1 + h_y^2$$

$$N = \frac{X_x \times X_y}{\|X_x \times X_y\|} = \frac{1}{\sqrt{1^2 + h_x^2 + h_y^2}} (-h_x, -h_y, 1)$$

$$X_x \times X_y = \begin{vmatrix} \varepsilon_1 & \varepsilon_2 & \varepsilon_3 \\ 1 & 0 & h_x \\ 0 & 1 & h_y \end{vmatrix} = (-h_x , -h_y, 1)$$

$$EG - F^2 = 1 + h_x^2 + h_y^2$$

$$e = \frac{h_{xx}}{\sqrt{1 + h_x^2 + h_y^2}} , \quad f = \frac{h_{xy}}{\sqrt{1 + h_x^2 + h_y^2}} , \quad g = \frac{h_{yy}}{\sqrt{1 + h_x^2 + h_y^2}}$$

→ ορίζουσα εσσιανού

$$K = \frac{h_{xx}h_{yy} - h_{xy}^2}{(1+h_x^2+h_y^2)^2}, \quad H = \frac{(1+h_y^2)h_{xx} - 2h_x h_y h_{xy} + (1+h_x^2)h_{yy}}{2(1+h_x^2+h_y^2)^{3/2}}$$

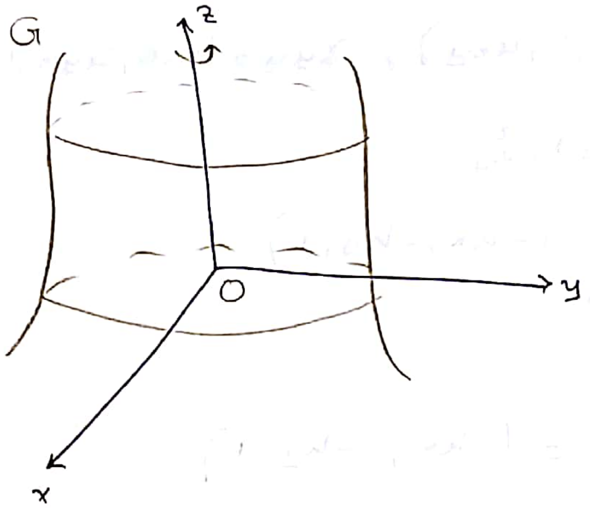
ορίζουσα Εσσιανού

$$\begin{vmatrix} f_{xx} & f_{xy} \\ f_{yx} & f_{yy} \end{vmatrix} = f_{xx}f_{yy} - f_{yx}f_{xy} = f_{xx}f_{yy} - f_{xy}^2$$

S_R^2 τότε $K = \frac{1}{R^2}$, $H = \frac{1}{R}$ (σταθερά)

→ Έχουμε επιφάνειες με αρνητική καμπυλότητα;

Εκ περιστροφής επιφάνειες



Θεωρώ την καμπύλη $c: I \to \mathbb{R}^3$

$c(s) = (\varphi(s), 0, \psi(s))$

s = μήκος τόξου, $\varphi(s) > 0$ $\forall s \in I$

Η επιφάνεια που παράγεται περιστρέφοντας την c γύρω από τον Oz είναι η κανονική παρ/κη επιφάνεια

$X : I \times \mathbb{R} \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$

$X(s,\theta) = (\varphi(s)\cos\theta, \varphi(s)\sin\theta, \psi(s))$

$X_s = (\dot\varphi\cos\theta, \dot\varphi\sin\theta, \dot\psi)$

$X_\theta = (-\varphi\sin\theta, \varphi\cos\theta, 0)$

$X_{ss} = (\ddot{\phi}\cos\theta, \ddot{\phi}\sin\theta, \ddot{\varphi})$

$X_{s\theta} = (-\dot{\phi}\sin\theta, \dot{\phi}\cos\theta, 0)$

$X_{\theta\theta} = (-\phi\cos\theta, -\phi\sin\theta, 0)$

$$X_s \times X_\theta = \begin{vmatrix} \varepsilon_1 & \varepsilon_2 & \varepsilon_3 \\ \dot{\phi}\cos\theta & \dot{\phi}\sin\theta & \dot{\varphi} \\ -\phi\sin\theta & \phi\cos\theta & 0 \end{vmatrix} = (-\dot{\varphi}\phi\cos\theta, -\dot{\varphi}\phi\sin\theta, \underbrace{\dot{\phi}\phi\cos^2\theta + \phi\dot{\phi}\sin^2\theta}) =$$

$\dot{\phi}\phi(\cos^2\theta + \sin^2\theta) =$
$= \dot{\phi}\phi \cdot 1 = \dot{\phi}\phi$

$= \phi(-\dot{\varphi}\cos\theta, -\dot{\varphi}\sin\theta, \dot{\phi}) \Rightarrow X_s \times X_\theta = \phi(-\dot{\varphi}\cos\theta, -\dot{\varphi}\sin\theta, \dot{\phi})$

$\|X_s \times X_\theta\| = \varphi\sqrt{(\dot{\varphi})^2 + (\dot{\varphi})^2} = \varphi$

Μοναδιαίο κάθετο :

$$N = \frac{X_s \times X_\theta}{\|X_s \times X_\theta\|} = (-\dot{\varphi}\cos\theta, -\dot{\varphi}\sin\theta, \dot{\phi}) \Rightarrow \boxed{N = (-\dot{\varphi}\cos\theta, -\dot{\varphi}\sin\theta, \dot{\phi})}$$

Πρώτη θεμελιώδη μορφή

$E = \|X_s\|^2 = (\dot{\phi})^2 + (\dot{\varphi})^2 = 1$

$F = \langle X_s, X_\theta \rangle = -\varphi\dot{\phi}\cos\theta\sin\theta + \dot{\phi}\phi\cos\theta\sin\theta = 0$

$G = \|X_\theta\|^2 = \phi^2\sin^2\theta + \phi^2\cos^2\theta = \phi^2$

Πίνακας 1ης θεμ. μορφής

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \varphi^2 \end{pmatrix}$$

Δευτέρη θεμελιώδη μορφή

$e = \langle X_{ss}, N \rangle = \dot{\varphi}\ddot{\varphi} - \dot{\varphi}\ddot{\varphi}$

$f = \langle X_{s\theta}, N \rangle = 0$

$g = \langle X_{\theta\theta}, N \rangle = \phi\dot{\varphi}$

Πίνακας 2ης θεμ. μορφής

$$\begin{pmatrix} \dot{\phi}\ddot{\psi} - \dot{\psi}\ddot{\phi} & 0 \\ 0 & \varphi\dot{\psi} \end{pmatrix}$$

Καμπυλότητα Gauss

$$K = \frac{eg-f^2}{EG-F^2} = \frac{\varphi\dot\psi(\dot\phi\ddot\psi - \dot\varphi\ddot\phi)}{\phi^2} = \frac{\dot\psi(\dot\phi\ddot\psi - \dot\psi\ddot\phi)}{\phi}$$

$$\Rightarrow \boxed{K = \frac{\dot\varphi(\dot\phi\ddot\psi - \dot\psi\ddot\phi)}{\phi}}$$

$$\dot\phi^2 + \dot\psi^2 = 1 \Rightarrow 2(\dot\phi\ddot\phi + \dot\psi\ddot\psi) = 0 \Rightarrow \dot\phi\ddot\phi + \dot\psi\ddot\psi = 0 \Rightarrow \dot\psi\ddot\psi = -\dot\phi\ddot\phi \quad (1)$$

$$K = \frac{\dot\phi\dot\psi\ddot\psi - (\dot\psi)^2\ddot\phi}{\phi} \overset{(1)}{=} \frac{-(\dot\phi)^2\ddot\phi - (\dot\psi)^2\ddot\phi}{\phi} = \frac{-\ddot\phi(\dot\phi^2+\dot\psi^2)}{\phi}$$

$$\boxed{K = -\frac{\ddot\phi}{\phi}}$$

SOS

Ερώτημα:
Υπάρχουν εκ περιστροφής επιφάνειες με σταθερή καμπυλότητα Gauss

απάντηση

Η εκ περιστροφής επιφάνεια έχει σταθερή καμπυλότητα Gauss $K \Leftrightarrow$
$\ddot\varphi + K\varphi = 0$ (είναι δ.ε την βρίσκω όπως ξέρω, και μετά βρίσκω το ϕ από την $\dot\phi^2 + \dot\psi^2 = 1$)

Έστω ότι $K=1$ (Υπάρχει σίγουρα μια, η σφαίρα με $R=1$)
άρα θα έχω $\ddot\phi + \phi = 0 \Rightarrow \phi(s) = a\cos s$ → σταθερά → το επιλέγω εγώ.

$$\dot\phi^2 + \dot\psi^2 = 1 \Rightarrow a^2\sin^2 s + \dot\psi^2 = 1 \Rightarrow \dot\psi = \pm\sqrt{1-a^2\sin^2 s}$$

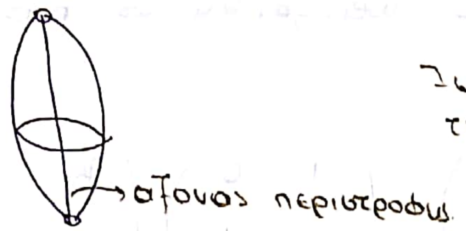
Επιλέγω το σχετικό

$$\varphi(s) = \int_{s_0}^{s} \sqrt{1-a^2\sin^2\sigma}\; d\sigma$$

• αν $a=1$ τότε θα έχω σφαίρα ακτίνας Δ

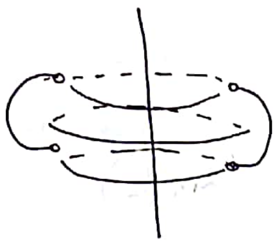
• αν $a\neq 1$ σημαίνει $a<1$ ή $a>1$

• $a<1$ $\phi(s), \psi(s)$ ορίζονται για κάθε s

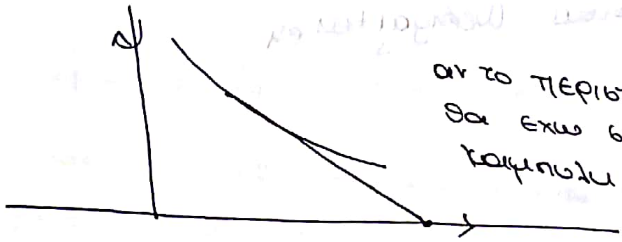


Ισομετρική με τη σφαίρα S^2

• $a>1$ πρέπει να περιορίσω το s σε κάποιο διάστημα



Ισομετρική με τη σφαίρα S^2

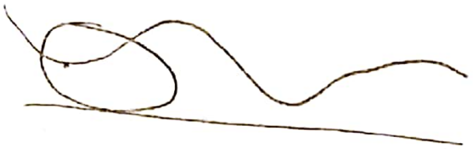


αν το περιστρέψω θα έχω σταθερή καμπυλότητα Gauss

Κωνικές τομές
1) έλλειψη
2) υπερβολή
3) παραβολή

Επιφάνειες με σταθερή μέση καμπυλότητα

Έλλειψη



Έχω διαγωνοποιήσει τη 2η θεμ. μορφή στον ταυτόχρονα $f=0=F$

Αν τη περιστρέψω η εστία θα διαγράψει μια καμπύλη

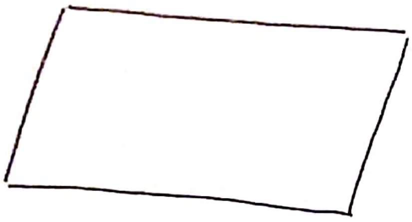
- Ο πίνακας της απεικόνισης Weingarten ως προς τη βάση $\{x_s, x_\theta\}$ και

$$A = \begin{pmatrix} E & F \\ F & G \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} e & f \\ f & g \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \frac{1}{\phi^2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} k & 0 \\ 0 & \phi\dot{\psi} \end{pmatrix} \Rightarrow$$

$$A = \begin{pmatrix} k & 0 \\ 0 & \frac{\dot{\psi}}{\phi} \end{pmatrix}$$

$$k_1 = \max\left\{k, \frac{\dot{\psi}}{\phi}\right\}, \quad k_2 = \min\left\{k, \frac{\dot{\psi}}{\phi}\right\} \qquad (k_1 \geq k_2)$$

x_s, x_θ είναι ιδιοδιανύσματα της απεικόνισης Weingarten (η βάση δεν είναι ορθομοναδιαία).



$k_1 = 0 = k_2$

$H = 0 = K$

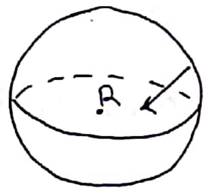
$II_p = 0 = 0 \cdot I_p$

$k_1 = \frac{1}{R} = k_2$

$K = \frac{1}{R^2}$, $H = \frac{1}{R}$

$II_p = \frac{1}{R} I_p$

S^2_R



Παρατηρηση

$k_1(p) = k_2(p) \iff H^2(p) = K(p)$

$k_1 = H + \sqrt{H^2 - K}$

$k_2 = H - \sqrt{H^2 - K}$, $H^2 \geq K$

Ερωτημα

Ποιες ειναι οι επιφανειες με την ιδιοτητα $H^2 = K$ (η ισοδυναμα $k_1 = k_2$)

Θεωρημα

Εστω S συνεκτική κανονική επιφανεια. Αν $H^2 = K$ ($\iff k_1 = k_2$) τοτε η S ειναι ανοιχτο υποσυνολο επιπεδου ή σφαιρα

Αποδειξη $k_1 = k_2 = k : S \to \mathbb{R}$

$$\left.\begin{aligned} L_p\, e_1(p) &= k_1(p)\, e_1(p) = k(p)\, e_1(p) \\ L_p\, e_2(p) &= k_2(p)\, e_2(p) = k(p)\, e_2(p) \end{aligned}\right\} \begin{pmatrix} k(p) & 0 \\ 0 & k(p) \end{pmatrix} = k(p) \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Αρα $L_p = k(p)\, Id$, $k = H$ λεια

Θεωρω ενα συστημα συντεταγμενων $X : U \subseteq \mathbb{R}^2 \to S$ με παραμετρους $(u,v) \in U$

$$\left.\begin{aligned} LX_u &= k X_u \\ LX_v &= k X_v \end{aligned}\right\} \iff \left\{\begin{aligned} -(N \circ X)_u &= k X_u \\ -(N \circ X)_v &= k X_v \end{aligned}\right.$$

Θα παραγωγίσω τις σχέσεις ως προς u και v

$$\begin{cases} -(N\circ X)_{uv} = (\kappa\circ X)_v X_u + \kappa\circ X \cdot X_{uv} \\ -(N\circ X)_{vu} = (\kappa\circ X)_u X_v + \kappa\circ X \, X_{vu} \end{cases}$$

(μεικτές παράγωγοι)

Εξωτ. γιν. ≠0 άρα τα διανύσματα Γ.Α

Θ. Swartz $\Rightarrow$ είναι ίσα

$$(\kappa\circ X)_v X_u - (\kappa\circ X)_u X_v = 0$$

X_u, X_v → βάση $\Rightarrow$ Γ.Α

$$(\kappa\circ X)_u = 0 = (\kappa\circ X)_v \Rightarrow d\kappa(X_u) = 0 = d\kappa(X_v)$$

$$\Rightarrow d\kappa_p = 0 \quad \forall p \in X(U) \quad \text{Άρα } d\kappa_p = 0 \quad \forall \kappa \in S \overset{(\Theta.4)}{\Rightarrow} \kappa = \sigma\tau\alpha\theta.$$

Περίπτωση $\kappa = 0$

$\Rightarrow L_p = 0 \quad \forall p \in S \Rightarrow dN_p = 0 \quad \forall p \in S$

$\Rightarrow$ Η απεικόνιση Gauss $N : S \to S^2$ είναι σταθερή δηλ

$N(p) = \vec{\alpha} \quad \forall p \in S \quad \vec{\alpha} = \sigma\tau\alpha\theta, \quad \|a\| = 1$

Θεωρώ τη συνάρτηση $h : S \to \mathbb{R} \quad h(p) = \langle p, \vec{\alpha} \rangle$

$dh_p : T_pS \to \mathbb{R} \qquad dh_p(w) = \langle w, \vec{\alpha} \rangle, \quad \forall w \in T_pS$

$$= \langle w, N(p) \rangle = 0$$

$\Rightarrow h = \sigma\tau\alpha\theta \quad \forall p \in S, \quad p = (x, y, z), \quad \vec{\alpha} = (A, B, \Gamma)$

$\langle p, \vec{\alpha} \rangle = c \Leftrightarrow Ax + By + \Gamma z = c$

(1) $\kappa_1(p)\, x^2 + \kappa_2(p)\, y^2 = \pm 1$

$I\!I_p(w)$

- p καλειται ελλειπτικο $\Leftrightarrow$ D_p = ελλειψη $\Leftrightarrow$ $\kappa_1(p)\,\kappa_2(p) > 0 \Leftrightarrow K(p) > 0$
- p καλειται υπερβολικο $\Leftrightarrow$ D_p = υπερβολη $\Leftrightarrow$ $\kappa_1(p) \cdot \kappa_2(p) < 0 \Leftrightarrow K(p) < 0$ η (1) ειναι αοριστη
- p καλειται παραβολικο $\Leftrightarrow$ D_p = ζευγος ευθειων $\Leftrightarrow$ $\kappa_1(p)\,\kappa_2(p) = 0$ και $\kappa_1(p) + \kappa_2(p) \neq 0$ $\Leftrightarrow$ $K(p) = 0$ και $H(p) \neq 0$

Εκφυλισμενη κατακτικη υπερβολης = ζευγος παραλληλων ευθειων

- p καλειται ισοπεδο $\Leftrightarrow$ $\kappa_1(p) = 0 = \kappa_2(p)$ $\Leftrightarrow$ $K(p) = 0 = H(p)$
- p καλειται ομφαλικο $\Leftrightarrow$ $\kappa_1(p) = \kappa_2(p) \neq 0$ $\Leftrightarrow$ $H^2(p) = K(p) \neq 0$

- p ελλειπτικο $\Leftrightarrow$ D_p = ελλειψη $\Leftrightarrow$ $K(p) > 0$ $\Leftrightarrow$ $I\!I_p$ ειναι θετικα ή αρνητικα οριστικη
- p υπερβολικο $\Leftrightarrow$ D_p = υπερβολη $\Leftrightarrow$ $K(p) < 0$ $\Leftrightarrow$ $I\!I_p$ αοριστη
- p παραβολικο $\Leftrightarrow$ D_p = ζευγος ευθειων $\Leftrightarrow$ $K(p) = 0$ και $H(p) \neq 0$ $\Leftrightarrow$ $I\!I_p$ ειναι θετικα ή αρνητικα ημιοριστικη

- p ισοπεδο $\Leftrightarrow$ $K(p) = 0 = H(p)$ $\Leftrightarrow$ $I\!I_p = 0$ $\Leftrightarrow$ $e = f = g = 0$ στο σημειο p
- p ομφαλικο $\Leftrightarrow$ $\kappa_1(p) = \kappa_2(p) \neq 0$ $\Leftrightarrow$ $H^2(p) = K(p) \neq 0$ $\Leftrightarrow$ $L_p = \lambda(p)\, I$ $\Leftrightarrow$ $I\!I_p = \lambda(p)\, I_p$, $\lambda(p) \neq 0$

Περίπτωση $\kappa \neq 0$

Θεωρώ την απεικόνιση $\phi : S \to \mathbb{R}^3$

$\phi(p) = N(p) + \frac{1}{\kappa} \cdot p \ , \ p \in S$

$\phi = N + \frac{1}{\kappa} I \ , \ I = Id|_S \ , \ Id : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$

$Id(p) = p$

$$d\phi_p = dN_p + \frac{1}{\kappa} dI_p = dN_p + \frac{1}{\kappa} I = -L_p + \frac{1}{\kappa} I = 0$$

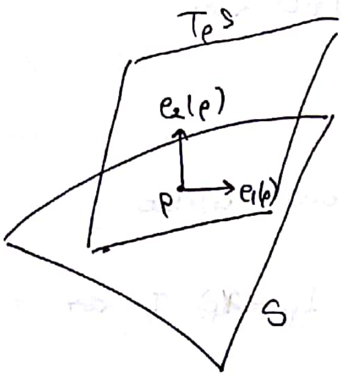
(Θ4)

$\Rightarrow \phi(p) = p_0 \quad \forall p \in S \ , \ p_0 = \text{σταθερό}$

Δηλαδή $N(p) + \frac{1}{\kappa} p = p_0 \Rightarrow \kappa N(p) + p = \kappa p_0 \Leftrightarrow p - \kappa p_0 = \kappa N(p)$

$\| p - \kappa p_0 \| = \| \kappa N(p) \| \Leftrightarrow d(p, \kappa p_0) = |\kappa| \Rightarrow$ σφαίρα.

- Σε κάθε εφαπτόμενο επίπεδο T_pS μια κωνική τομή



Δεικτρίνουσα Dupin στο σημείο $p \in S$ είναι το σύνολο

$$D_p = \{ w \in T_pS \ | \ II_p(w) = \pm 1 \}$$

$L_p e_1(p) = \kappa_1(p) e_1(p) \ , \ L_p e_2(p) = \kappa_2(p) e_2(p)$

$w = x e_1 + y e_2$

$II_p(w) = \pm 1 \Leftrightarrow \langle L_p(xe_1 + ye_2), xe_1 + ye_2 \rangle = \pm 1 \Leftrightarrow$

$\langle x L e_1 + y L e_2, xe_1 + ye_2 \rangle = \pm 1 \Leftrightarrow$

$\langle x \kappa_1(p) e_1 + y \kappa_2(p) e_2, xe_1 + ye_2 \rangle = \pm 1 \Leftrightarrow \boxed{\kappa_1(p) x^2 + \kappa_2(p) y^2 = \pm 1}$

ή $\kappa_2 = 0$, $\kappa_1 \neq 0$

- $\kappa_1 = 0$, $\kappa_2 \neq 0$ Ζεύγος παράλληλων ευθειών
- κ_1, κ_2 ομόσημα $\Rightarrow$ έλλειψη
- κ_1, κ_2 ετερόσημα $\Rightarrow$ υπερβολή (ζεύγος)

Κωνική τομή
Κωνικές, ελλείψεις, υπερβολές

Scanned by CamScanner